



p-ISSN 2815-648X
p-ISSN 1859-4611
e-ISSN 3030-4717

Tạp chí

KHOA HỌC TÂY NGUYÊN

Tay Nguyen Journal of Science

SÁNG TẠO - CHẤT LƯỢNG - HỘI NHẬP



Vol 19 • No 2, April of 2025

TẠP CHÍ KHOA HỌC TÂY NGUYÊN

TỔNG BIÊN TẬP

PGS.TS. Lê Đức Niêm

PHÓ TỔNG BIÊN TẬP

PGS.TS. Nguyễn Văn Nam

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG

GS.TS. Nguyễn Anh Dũng

ỦY VIÊN

GS.TS. San-Lang Wang	I Đại học Tamkang, Đài Loan
GS.TS. Lê Thị Thanh Nhân	I Bộ Giáo Dục và Đào tạo
GS.TS. Trương Bá Thanh	I Trường Đại học Kinh tế, Đại học Đà Nẵng
GS.TS. Lê Đức Ngoan	I Trường Đại học Nông lâm, Đại học Huế
GS.TS. Đinh Quang Khiếu	I Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế
GS.TS. Đặng Tuấn Đạt	I Trường Đại học Y Dược Buôn Ma Thuột
PGS.TS. Đặng Hà Việt	I Cục Thể dục Thể thao, Bộ Văn hóa Thông tin và Du lịch
PGS.TS. Đoàn Thị Tâm	I Trường Đại học Sư Phạm Thành phố Hồ Chí Minh
PGS.TS. Buôn Krông Thị Tuyết Nhung	I Trường Đại học Tây Nguyên
PGS.TS. Nguyễn Phương Đại Nguyên	I Trường Đại học Tây Nguyên
PGS.TS. Nguyễn Thị Thanh Hương	I Trường Đại học Tây Nguyên
PGS.TS. Trần Quang Hạnh	I Trường Đại học Tây Nguyên
PGS.TS. Phan Văn Trọng	I Trường Đại học Tây Nguyên

TRƯỞNG BAN THƯ KÝ - PHỤ TRÁCH TRỊ SỰ

TS. Nguyễn Đình Sỹ I Phòng KH&QHQT

THÀNH VIÊN BAN THƯ KÝ

CN. Y Zina Ksor	I Phòng KH&QHQT
ThS. Trần Thị Minh Hà	I Phòng KH&QHQT
KS. Lê Thụy Vân Nhi	I Phòng KH&QHQT
TS. Dương Quốc Huy	I Khoa KHTN&CN

ĐỊA CHỈ TÒA SOẠN

Phòng Khoa học & Quan hệ Quốc tế, trường Đại học Tây Nguyên

567 Lê Duẩn, TP. Buôn Ma Thuột, tỉnh Đắk Lắk, Việt Nam

Điện thoại: (84) 262.3853.276 Fax: (84) 262.3825.184

E-mail: tapchikhoahocdhtn@ttn.edu.vn | Website: <https://tnjos.vn>

p-ISSN 1859-4611 & 2815-648X/ e-ISSN 3030-4717

Giấy phép hoạt động báo chí in số 197/GP-BTTTT,
do Bộ trưởng Bộ Thông tin và Truyền thông cấp ngày 06/6/2023
In 50 quyển, khổ 20x29cm. In tại Công ty TNHH một thành viên In Đắk Lắk,
45 Nguyễn Tất Thành, thành phố Buôn Ma Thuột, tỉnh Đắk Lắk.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 04 năm 2025.



TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN
TAY NGUYEN UNIVERSITY

Tạp chí **KHOA HỌC** **TÂY NGUYÊN**

Tay Nguyen Journal of Science

p-ISSN 1859-4611 & 2815-648X/ e-ISSN 2815-6471

Tập 19 - Số 2, tháng 04 năm 2025
Vol 19 - No 2, April of 2025

MỤC LỤC	TABLE OF CONTENTS	Tr./ pp.
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ	NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY	
1. Ảnh hưởng của phương pháp chưng cất tinh dầu đến thành phần hóa học và khả năng ức chế một số enzyme của tinh dầu gừng gió (<i>Zingiber zerumbet</i>) được trồng tại thành phố Buon Ma Thuot	Effects of essential oil distillation method on the chemical composition and enzyme inhibitory activity of <i>Zingiber zerumbet</i> essential oil cultivated in Buon Ma Thuot city	
Nguyễn Thị Thanh, Bùi Thị Quỳnh Hoa, Đoàn Mạnh Dũng, Đoàn Chiến Thắng, Vũ Bích Thủy & Nguyễn Bằng Phương	Nguyen Thi Thanh, Bui Thi Quynh Hoa, Doan Manh Dung, Doan Chien Thang, Vu Bich Thuy & Nguyen Bang Phuong	1
2. Tái sử dụng phụ phẩm đậu nành trong sản xuất sinh khối <i>Bacillus amyloliquefaciens</i> và đánh giá tiềm năng chống nấm <i>Fusarium</i>	Reutilization of soybean by-product for biomass production of <i>Bacillus amyloliquefaciens</i> and evaluation of its antifungal potential against <i>Fusarium</i>	
Trần Thị Hà Trang, Ngô Văn Anh, Nguyễn Văn Bốn & Nguyễn Anh Dũng	Tran Thi Ha Trang, Ngo Van Anh, Nguyen Van Bon & Nguyen Anh Dung	13
3. Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích của hai hàm (p, h) -lồi	Hermite-Hadamard-type inequalities for product of two (p, h) -convex functions	
Lê Bá Thông & Nguyễn Ngọc Huệ	Le Ba Thong & Nguyen Ngoc Hue	22
KHOA HỌC SỨC KHỎE	HEALTH SCIENCES	
4. Hiệu quả điều trị đau dây thần kinh tọa bằng phương pháp kết hợp điện châm huyết Giáp tích L1-L5 tại Bệnh viện Y học cổ truyền tỉnh Đắk Lắk	The effect of electroacupuncture at the Jiaji points L1-L5 on treating sciatic nerve pain at the Dak Lak Traditional Medicine Hospital	
Lê Thị Mơ & Phạm Ngọc Liễu	Le Thi Mo & Pham Ngoc Lieu	31
5. Tỷ lệ kháng Rifampicin và một số yếu tố liên quan ở bệnh nhân mắc lao phổi Xpert dương tại Bệnh viện phổi Đắk Lắk	Prevalence of Rifampicin resistance and associated factors among Xpert-positive pulmonary tuberculosis patients at Dak Lak Tuberculosis and Lung diseases Hospital	
Trịnh Bá Hùng Mạnh	Trinh Ba Hung Manh	38
6. Đặc điểm lâm sàng và một số yếu tố liên quan đến mức độ nặng của viêm phổi ở trẻ em tại bệnh viện Đa khoa Vùng Tây Nguyên	Clinical characteristics and associated factors of severe pneumonia in children at the Central Highlands Regional General Hospital	
Nguyễn Thị Thúy Hằng	Nguyen Thi Thuy Hang	46
7. Đánh giá kết quả thay khớp gối toàn phần không tái tạo mặt khớp bánh chè tại Bệnh viện Đa khoa Vùng Tây Nguyên	Evaluation of outcomes of Total Knee Arthroplasty without patellar resurfacing at the Central Highlands Regional General Hospital	
Nguyễn Minh Trục, Trịnh Duy Khánh & Nguyễn Ngọc Thiện	Nguyen Minh Truc, Trinh Duy Khanh & Nguyen Ngoc Thien	52
KHOA HỌC XÃ HỘI VÀ NHÂN VĂN	SOCIAL SCIENCES AND HUMANITIES	
8. Tác động của doanh nghiệp kiểm toán chuyên gia đến tính kịp thời của báo cáo tài chính bán niên ngành ngân hàng tại Việt Nam	Impact of industry specialist auditors on the timeliness of interim financial reports in Vietnamese banks	
Phạm Thanh Hùng, Nguyễn Thị Trà Giang, Bùi Thị Thanh Thùy & Võ Xuân Hội	Pham Thanh Hung, Nguyen Thi Tra Giang, Bui Thi Thanh Thuy & Vo Xuan Hoi	59
9. Nhận thức của giáo viên trung học phổ thông về việc sử dụng ChatGPT trong việc tạo bài kiểm tra đọc hiểu tiếng Anh cho học sinh lớp 10	High school teachers' perceptions of using ChatGPT for designing English reading comprehension tests for tenth-grade students	
Hoàng Hồng Phương & Lê Thị Hạ Quỳnh	Hoang Hong Phuong & Le Thi Ha Quynh	67

10. Các nhân tố ảnh hưởng tới hiệu quả làm việc nhóm của sinh viên Trường Du lịch - Đại học Huế
Đặng Thị Tuyết Ngọc, Lê Thị Thanh Giao & Đoàn Khánh Hưng
Factors affecting the effectiveness of students' teamwork at the School of Hospitality and Tourism, Hue University
Dang Thi Tuyen Ngoc, Le Thi Thanh Giao & Doan Khanh Hung 76
11. Thực trạng đạo đức, lối sống của sinh viên trường Đại học Tây Nguyên
Vũ Minh Chiến & Nguyễn Thị Thanh Vân
The current status of morality and lifestyle among students at Tay Nguyen University
Vu Minh Chien & Nguyen Thi Thanh Van 87
12. Ảnh hưởng của văn hoá doanh nghiệp đến sự gắn bó của nhân viên làm việc tại công ty dịch vụ Mobifone khu vực 7
Phan Thị Xuân Hương & Đỗ Nguyễn Quỳnh Lam
The influence of corporate culture on employee commitment at the Mobifone service company region 7
Phan Thi Xuan Huong & Do Nguyen Quynh Lam 94
13. Ảnh hưởng của văn hoá truyền thống trong tiểu thuyết Mạc Ngôn
Phan Thị Tâm Thanh
The influence of traditional culture in Mo Yan's novels
Phan Thi Tam Thanh 109
14. Giáo dục đạo đức môi trường cho sinh viên theo quan điểm của triết học Mác – Lênin
Phạm Thị Tâm
Environmental ethics education for students from the perspective of Marxist-Leninist philosophy
Pham Thi Tam 116
15. Chất lượng dịch vụ giao hàng chặng cuối đến sự hài lòng của khách hàng thương mại điện tử tại Bình Định
Kiều Thị Hương, Lê Nhật Hằng, Dương Thị Nhớ, Lê Thị Mỹ Quyên, Phan Ngọc Vi & Nguyễn Châu Duyên
The impact of last-mile delivery service quality on e-commerce customer satisfaction in Binh Dinh
Kieu Thi Huong, Le Nhat Hang, Duong Thi Nho, Le Thi My Quyen, Phan Ngoc Vi & Nguyen Chau Duyen 122

BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU HERMITE-HADAMARD CHO TÍCH CỦA HAI HÀM (p, h) -LỒI**Lê Bá Thông¹, Nguyễn Ngọc Huệ¹**

Ngày nhận bài: 10/03/2025; Ngày phản biện thông qua: 08/04/2025; Ngày duyệt đăng: 10/04/2025

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích của hai hàm (p, h) -lồi. Các bất đẳng thức này là mở rộng của các kết quả cổ điển cho hàm lồi. Dựa trên những kết quả đạt được, chúng tôi chỉ ra các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích của hàm (p, h) -lồi liên quan đến tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville và cho tích của hai hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa.

Từ khóa: Hàm (p, h) -lồi, hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa, bất đẳng thức Hermite-Hadamard, bất đẳng thức Fejér, tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville.

1. MỞ ĐẦU

Hàm lồi đóng một vai trò then chốt trong nhiều nhánh của toán học, đặc biệt là trong tối ưu hóa, giải tích và lý thuyết bất đẳng thức. Bất đẳng thức Hermite-Hadamard, một kết quả cơ bản cho hàm lồi, cung cấp một ước lượng cho các giá trị trung bình liên quan đến hàm lồi. Cụ thể, đối với một hàm lồi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, bất đẳng thức Hermite-Hadamard (Fejér, 1906; Hadamard, 1893) chỉ ra rằng

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Bất đẳng thức này đã được nghiên cứu rộng rãi và tổng quát hóa theo nhiều hướng khác nhau. Một hướng nghiên cứu được khởi xướng bởi Pachpatte (Pachpatte, 2003) đã tập trung vào việc thiết lập một số bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích của hai hàm lồi. Những nghiên cứu tiếp theo đã được thực hiện bởi Budak và Bakis (Budak and Bakis, 2020), những người đã khám phá các bất đẳng thức kiểu Fejér cho tích của hai hàm lồi, mở rộng và làm mịn các kết quả hiện có. Về sau, đã có nhiều kết quả khác về bất đẳng thức cho tích của hai hàm lồi (có thể tìm thấy trong (Cerone and Dragomir, 2008) và (Chen, 2013)), cho tích của hai hàm (p, h) -lồi (tham khảo (Hue and Huy, 2016) và (Sarıkaya et al., 2003)) và một số lớp hàm khác (xem (Budak and Bakis, 2020; Dragomir, 2017; Nawaz et al., 2021) và (Sahoo and Kodamasingh, 2020)).

Trong những năm gần đây, khái niệm về hàm (p, h) -lồi, được giới thiệu bởi Fang và Shi (Fang and Shi, 2014), đã thu hút được sự chú ý đáng kể. Sự tổng quát hóa này của tính lồi đã được chứng minh là một công cụ mạnh mẽ để thiết lập các bất đẳng thức tích phân mới. Hơn nữa, khái niệm về tính lồi đối xứng hóa, bắt đầu từ những nghiên cứu của Dragomir (Dragomir, 2016) cho hàm lồi đối

xứng hóa và hàm h -lồi đối xứng hóa cho đến gần đây là hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa (Thong, 2023), đã cung cấp những hiểu biết mới liên quan đến các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard.

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh các bất đẳng thức tích phân mới cho tích của hai hàm (p, h) -lồi và (p, h) -lồi đối xứng hóa. Cụ thể, chúng tôi thiết lập các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho các tích như vậy. Những kết quả này là mở rộng của các kết quả trong (Pachpatte, 2003). Chúng tôi cũng chỉ ra các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville của tích của hai hàm (p, h) -lồi dựa trên kết quả vừa đạt được. Hơn nữa, chúng tôi tiếp tục phát triển nghiên cứu của Thong (Thong, 2023) bằng cách cung cấp các bất đẳng thức cho tích của hai hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa.

2. VẬT LIỆU VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU**2.1. Nội dung nghiên cứu**

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu những nội dung chính như sau:

- Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích hai hàm (p, h) -lồi.
- Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích phân bậc không nguyên của tích hai hàm (p, h) -lồi.
- Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích hai hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

- Chúng tôi sử dụng phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết bao gồm phân tích, so sánh, đối chiếu, tổng quát hóa, đặc biệt hóa để dự đoán và đưa ra các bất đẳng thức mới.

- Sử dụng các biến đổi liên quan đến các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard để thiết lập các bất đẳng thức mới cho lớp hàm (p, h) -lồi và

¹Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên.

Tác giả liên hệ: Lê Bá Thông; ĐT: 0978165041; Email: lbthong@ttn.edu.vn.

(p, h) -lồi đối xứng hoá.

- Sử dụng các đánh giá dựa trên lý thuyết hàm (p, h) -lồi và (p, h) -lồi đối xứng hoá để suy ra các tính chất của lớp hàm này.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Định nghĩa và các kết quả cơ bản

Xuyên suốt bài báo này, chúng tôi xét a, b là các số dương, với $a < b$; $p \neq 0$; J là khoảng thực thỏa mãn $(0, 1) \subset J$; hàm $h: J \rightarrow [0, \infty)$ khả tích và không đồng nhất bằng không trên $[0, 1]$. Trong những định lý phía sau, với mục đích làm cho các bất đẳng thức trông đơn giản hơn, chúng tôi thường chia cả hai vế cho $h\left(\frac{1}{2}\right)$. Do đó, chúng tôi giả định $h\left(\frac{1}{2}\right)$ khác 0 trong trường hợp nó xuất hiện ở mẫu số. Ngoài ra, với f, g là các hàm số bất kì, ta kí hiệu

$$M(x, y) = f(x)g(x) + f(y)g(y), \text{ và}$$

$$N(x, y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

với mọi x, y thuộc tập xác định chung của f, g .

Đầu tiên, trong Định lý 1, chúng tôi trình bày lại bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích của hai hàm lồi đã được Pachpatte (Pachpatte, 2003) đưa ra.

Định lý 1 (Pachpatte, 2003). Nếu f và g là các hàm lồi trên $[a, b]$ và fg khả tích trên $[a, b]$ thì

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ & \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \\ & + \frac{1}{6}M(a, b) + \frac{1}{3}N(a, b), \end{aligned}$$

và

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(a, b) + \frac{1}{6}N(a, b),$$

Các bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard-Fejér cho tích của hai hàm lồi đã được thiết lập gần đây bởi Budak và cộng sự (Budak and Bakis, 2020).

Định lý 2 (Budak and Bakis, 2020). Giả sử w là một hàm không âm, khả tích trên $[a, b]$, và đối xứng qua $\frac{a+b}{2}$, tức là, $w(x) = w(a+b-x)$. Nếu f và g là các hàm lồi trên $[a, b]$ sao cho fgw khả tích trên $[a, b]$, thì ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} & 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \\ & \leq \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \\ & + \frac{M(a, b)}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx \\ & + \frac{N(a, b)}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)^2 w(x)dx, \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx \\ & \leq \frac{M(a, b)}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)^2 w(x)dx \\ & + \frac{N(a, b)}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)(x-a)w(x)dx. \end{aligned}$$

Trong mục tiếp theo, chúng tôi tổng quát hóa các kết quả trong Định lý 1 cho trường hợp các hàm (p, h) -lồi, một khái niệm được giới thiệu bởi Fang trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 1 (Fang and Shi, 2014). Ta nói rằng f là một hàm (p, h) -lồi trên $[a, b]$ nếu f không âm và

$$\begin{aligned} & f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) \\ & \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y), \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in [a, b]$, và $t \in (0, 1)$.

Từ định nghĩa trên, ta có thể thấy rằng nếu f và g là các hàm (p, h) -lồi trên $[a, b]$, thì chúng cũng là các hàm (p, h) -lồi trên $[x, y]$, với mọi $x, y \in [a, b]$ và $x < y$. Chúng tôi sử dụng tính chất này trong phần tiếp theo để thiết lập các kết quả.

Bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho các hàm (p, h) -lồi được giới thiệu bởi Fang (Fang and Shi, 2014) như sau.

Định lý 3 (Fang and Shi, 2014). Nếu f là hàm (p, h) -lồi và khả tích trên $[a, b]$ và $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$

$$\begin{aligned} & \text{thì} \\ & \frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ & \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b x^{p-1} f(x)dx \\ & \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t)dt. \end{aligned}$$

Với f là một hàm số bất kì xác định trên $[a, b]$, ta kí hiệu

$$P_{(f;p)}(x) = \frac{1}{2} \left[f(x) + f([a^p + b^p - x^p]^{1/p}) \right], \quad \leq [f(a) + f(b)] \int_0^1 h(t) dt.$$

với mọi $x \in [a, b]$ và gọi nó là ánh xạ p -đối xứng của f trên đoạn $[a, b]$. Từ công thức xác định ánh xạ p -đối xứng, ta thấy rằng

$$P_{(f;p)} \text{ đối xứng qua } \left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p}, \text{ tức là}$$

$$P_{(f;p)}(x) = P_{(f;p)}([a^p + b^p - x^p]^{1/p}). \text{ Hơn nữa,}$$

ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng

$$P_{(f;p)}\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) = f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right);$$

$$P_{(f;p)}(a) = P_{(f;p)}(b) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]. \quad (1)$$

Các đẳng thức này góp phần vào việc thiết lập các bất đẳng thức cho lớp hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa.

Định nghĩa 2 (Thong, 2023). Một hàm $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là (p, h) -lồi đối xứng hóa trên $[a, b]$ nếu ánh xạ p -đối xứng $P_{(f;p)}$ là (p, h) -lồi trên $[a, b]$.

Trong (Thong, 2023), tác giả đã chỉ ra rằng lớp các hàm (p, h) -lồi trên $[a, b]$ là một tập con thực sự của lớp các hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa trên $[a, b]$. Điều này có nghĩa là lớp hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa là một mở rộng của lớp hàm (p, h) -lồi.

Định lý 4 (Thong, 2023). Nếu f là (p, h) -lồi đối xứng hóa và khả tích trên $[a, b]$ và $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ thì

$$\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

$$\leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx$$

3.2. Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích hai hàm (p, h) -lồi

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard và trường hợp mở rộng của nó là bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard-Fejér cho tích của hai hàm (p, h) -lồi.

Định lý 5. Giả sử f và g là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[a, b]$, fg khả tích trên $[a, b]$ và

$h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

$$\leq \frac{p}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z)$$

$$\times [g(z) + g([x^p + y^p - z^p]^{1/p})] dz$$

$$\leq \frac{p}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) dz$$

$$+ M(x, y) \int_0^1 h(t) h(1-t) dt$$

$$+ N(x, y) \int_0^1 h^2(t) dt, \quad (2)$$

và

$$\frac{p}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) dz$$

$$\leq M(x, y) \int_0^1 h^2(t) dt$$

$$+ N(x, y) \int_0^1 h(t) h(1-t) dt, \quad (3)$$

với mọi $x, y \in [a, b]$.

Chứng minh.

Vì f và g là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[a, b]$ nên chúng cũng là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[x, y]$ (hoặc $[y, x]$), với mọi $x, y \in [a, b]$. Khi đó, sử dụng tính (p, h) -lồi của f và g ta có

$$f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

$$= f\left(\left[\frac{tx^p + (1-t)y^p}{2} + \frac{(1-t)x^p + ty^p}{2}\right]^{1/p}\right) \times g\left(\left[\frac{tx^p + (1-t)y^p}{2} + \frac{(1-t)x^p + ty^p}{2}\right]^{1/p}\right)$$

$$\leq h^2\left(\frac{1}{2}\right) [f([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) + f([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p})]$$

$$\times [g([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) + g([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p})]$$

$$\begin{aligned}
 &= h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \left[f \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) g \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) \right. \\
 &\quad + f \left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p} \right) g \left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p} \right) + f \left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p} \right) g \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) \\
 &\quad \left. + f \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) g \left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p} \right) \right]. (4)
 \end{aligned}$$

Lấy tích phân các bất đẳng thức trên theo t trên đoạn $[0, 1]$, sau khi đổi biến $z = [(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}$, ta thu được

$$\begin{aligned}
 &f \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) g \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) \int_x^y z^{p-1} dz \\
 &\leq 2h^2 \left(\frac{1}{2} \right) \left[\int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + \int_x^y z^{p-1} f(z) g \left([x^p + y^p - z^p]^{1/p} \right) dz \right].
 \end{aligned}$$

Điều này suy ra bất đẳng thức đầu tiên trong (2).

Để chứng minh bất đẳng thức thứ hai trong (2), ta sử dụng tính chất (p, h) -lồi của f và g trên đoạn $[x, y]$ (hoặc $[y, x]$) để dẫn đến các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
 &f \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) g \left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p} \right) \\
 &\leq [h(t)f(x) + h(1-t)f(y)] \\
 &\quad \times [h(1-t)g(x) + h(t)g(y)] \\
 &= h(t)h(1-t) \left[f(x)g(x) + f(y)g(y) \right] \\
 &\quad + h^2(t)f(x)g(y) + h^2(1-t)f(y)g(x). \quad (5)
 \end{aligned}$$

Lấy tích phân cả hai vế của (5) theo t trên đoạn $[0, 1]$, sau khi đổi biến $z = [(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}$ ở vế trái, ta thu được

$$\begin{aligned}
 &\frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g \left([x^p + y^p - z^p]^{1/p} \right) dz \\
 &\leq M(x, y) \int_0^1 h(t)h(1-t)dt + N(x, y) \int_0^1 h^2(t)dt.
 \end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức này với bất đẳng thức

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2h^2 \left(\frac{1}{2} \right)} f \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) g \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) \int_x^y w(z) dz \\
 &\leq \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) w(z) \left[g(z) + g \left([x^p + y^p - z^p]^{1/p} \right) \right] dz \\
 &\leq \frac{P}{y^p - x^p} \left[\int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) w(z) dz \right. \\
 &\quad \left. + M(a, b) \int_x^y z^{p-1} h \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) h \left(\frac{y^p - z^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz + N(a, b) \int_x^y z^{p-1} h^2 \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz \right],
 \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in [a, b]$ và

đầu tiên trong (2), ta thu được bất đẳng thức thứ hai.

Để chứng minh (3), ta biến đổi như sau

$$\begin{aligned}
 &f \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) g \left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p} \right) \\
 &\leq [h(t)f(x) + h(1-t)f(y)] \\
 &\quad \times [h(t)g(x) + h(1-t)g(y)] \\
 &= h^2(t)f(x)g(x) + h^2(1-t)f(y)g(y) \\
 &\quad + h(t)h(1-t) \left[f(x)g(y) + f(y)g(x) \right]. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Lấy tích phân cả hai vế của (6) theo t trên đoạn $[0, 1]$, sau khi đổi biến $z = [(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}$ ở vế trái, ta thu được

$$\begin{aligned}
 &\frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) dz \\
 &\leq M(x, y) \int_0^1 h^2(t)dt + N(x, y) \int_0^1 h(t)h(1-t)dt.
 \end{aligned}$$

Vậy chứng minh được hoàn thành.

Nhận xét 1. Nếu h là hàm đồng nhất, $p = 1$, và $x = a, y = b$, kết quả của Định lý 5 trở thành kết quả của Định lý 1.

Định lý 6. Giả sử w là hàm không âm, khả tích trên đoạn $[a, b]$, và đối xứng qua điểm $\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{1/p}$. Nếu f và g là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[a, b]$ sao cho fgw khả tích trên $[a, b]$ và $h \left(\frac{1}{2} \right) \neq 0$ thì ta có các bất đẳng thức sau

$$\int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) w(z) dz$$

$$\leq M(a, b) \int_x^y z^{p-1} h^2 \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz + N(a, b) \int_x^y z^{p-1} h \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) h \left(\frac{y^p - z^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz,$$

với mọi $x, y \in [a, b]$ thỏa mãn $x < y$.

Chứng minh. Nhân cả hai vế của bất đẳng thức (4) và (5) với $w([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p})$, sau đó lấy tích phân và áp dụng phép đổi biến, ta lần

lượt thu được các kết quả

$$\frac{1}{2h^2 \left(\frac{1}{2} \right)} f \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) g \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) \int_x^y w(z) dz$$

$$\leq \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) w(z) \left[g(z) + g([x^p + y^p - z^p]^{1/p}) \right] dz$$

và

$$\frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g([x^p + y^p - z^p]^{1/p}) w(z) dz$$

$$\leq M(a, b) \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} h \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) h \left(\frac{y^p - z^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz$$

$$+ N(a, b) \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} h^2 \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta có được kết quả thứ nhất trong Định lý 6. Kết quả thứ hai thu được bằng cách áp dụng phương pháp tương tự cho (6):

$$\frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) g(z) w(z) dz$$

$$\leq M(a, b) \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} h^2 \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz$$

$$+ N(a, b) \frac{P}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} h \left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p} \right) h \left(\frac{y^p - z^p}{y^p - x^p} \right) w(z) dz.$$

Chia cả hai vế cho $\frac{P}{y^p - x^p}$, với $x < y$, ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét 2. Nếu h là hàm đồng nhất, $p = 1$, và $x = a, y = b$, kết quả trong Định lý 6 trở thành kết quả trong Định lý 2.

3.3. Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville của tích hai hàm (p, h) -lồi

Trước tiên ta nhắc lại rằng các kí hiệu $J_{a^+}^\alpha f$ và $J_{b^-}^\alpha f$ biểu thị các tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville bậc $\alpha \geq 0$ (Kilbas et al., 2006), được định nghĩa bởi

$$J_{a^+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > a,$$

và

$$J_{b^-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, x < b.$$

Ở đây, $\Gamma(\alpha)$ là hàm Gamma xác định như trong công thức sau

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Định lý 7. Giả sử f và g là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[a, b]$, fg khả tích trên $[a, b]$ và

$h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{h^2 \left(\frac{1}{2} \right)} f \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right) g \left(\left[\frac{x^p + y^p}{2} \right]^{1/p} \right)$$

$$\leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(y^p - x^p)^\alpha} [J_{(x^p)^+}^\alpha f(y)g(y) + J_{(y^p)^-}^\alpha f(x)g(x)] \\ + 2\alpha M(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} h(t)h(1-t)dt \\ + \alpha N(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} [h^2(t) + h^2(1-t)]dt,$$

với mọi $x, y \in [a, b]$.

Chứng minh.

Từ các bất đẳng thức (4) và (5), ta có

$$\frac{1}{h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ \leq f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) g\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) \\ + f\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) g\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) \\ + 2M(x, y)h(t)h(1-t) \\ + N(x, y)[h^2(t) + h^2(1-t)].$$

Nhân bất đẳng thức trên với $t^{\alpha-1}$, sau đó lấy tích phân theo t trên đoạn $[0, 1]$, ta thu được

$$\frac{1}{\alpha h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ \leq \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) g\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) dt \\ + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) g\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) dt \\ + 2M(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} h(t)h(1-t)dt + N(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} [h^2(t) + h^2(1-t)]dt. \quad (7)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ bất đẳng thức (7) với lưu ý như sau

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) g\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) dt \\ + \int_0^1 t^{\alpha-1} f\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) g\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) dt \\ = \int_{x^p}^{y^p} \left[\frac{y^p - z}{y^p - x^p} \right]^{\alpha-1} f\left(z^{1/p}\right) g\left(z^{1/p}\right) \frac{dz}{y^p - x^p} + \int_{x^p}^{y^p} \left[\frac{z - x^p}{y^p - x^p} \right]^{\alpha-1} f\left(z^{1/p}\right) g\left(z^{1/p}\right) \frac{dz}{y^p - x^p} \\ = \frac{\Gamma(\alpha)}{(y^p - x^p)^\alpha} [J_{(x^p)^+}^\alpha f(y)g(y) + J_{(y^p)^-}^\alpha f(x)g(x)]. \quad (9)$$

Ta kết thúc chứng minh.

Định lý 8. Giả sử f và g là các hàm (p, h) -lồi trên đoạn $[a, b]$ và fg khả tích trên $[a, b]$. Khi đó ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(y^p - x^p)^\alpha} [J_{(x^p)^+}^\alpha f(y)g(y) + J_{(y^p)^-}^\alpha f(x)g(x)] \\ \leq M(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} [h^2(t) + h^2(1-t)]dt \\ + 2N(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} h(t)h(1-t)dt,$$

với mọi $x, y \in [a, b]$.

Chứng minh.

Bằng cách cộng hai bất đẳng thức:

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) g\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) \\ \leq h^2(t)f(x)g(x) + h^2(1-t)f(y)g(y)$$

$$+ h(t)h(1-t)[f(x)g(y) + f(y)g(x)],$$

và

$$f\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) g\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) \\ \leq h^2(1-t)f(x)g(x) + h^2(t)f(y)g(y) \\ + h(t)h(1-t)[f(x)g(y) + f(y)g(x)],$$

ta thu được

$$f\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) g\left([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}\right) \\ + f\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) g\left([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}\right) \\ \leq [h^2(t) + h^2(1-t)][f(x)g(x) + f(y)g(y)] \\ + 2h(t)h(1-t)[f(x)g(y) + f(y)g(x)] \\ = [h^2(t) + h^2(1-t)]M(x, y)$$

$$+2h(t)h(1-t)N(x, y).$$

Nhân bất đẳng thức trên với $t^{\alpha-1}$, sau đó lấy

tích phân theo t trên đoạn $[0, 1]$, ta thu được bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} & \int_0^1 t^{\alpha-1} f([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) g([tx^p + (1-t)y^p]^{1/p}) dt \\ & + \int_0^1 t^{\alpha-1} f([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}) g([(1-t)x^p + ty^p]^{1/p}) dt \\ & \leq M(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} [h^2(t) + h^2(1-t)] dt + 2N(x, y) \int_0^1 t^{\alpha-1} h(t)h(1-t) dt. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh suy ra từ bất đẳng thức này và đẳng thức (9).

3.4. Bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard cho tích hai hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa

Phần này trình bày một số bất đẳng thức liên quan đến các hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa. Cụ thể, bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard và bất đẳng

thức kiểu Hermite-Hadamard-Fejér lần lượt được trình bày trong hai định lý tiếp theo.

Định lý 9. Giả sử f và g là các hàm (p, h) -lồi đối xứng hóa trên đoạn $[a, b]$, fg khả tích trên $[a, b]$ và $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ & \leq \frac{P}{b^p - a^p} \int_a^b z^{p-1} f(z) [g(z) + g([a^p + b^p - z^p]^{1/p})] dz \\ & \leq \frac{1}{2} [M(a, b) + N(a, b)] \int_0^1 [h(t) + h(1-t)]^2 dt. \end{aligned}$$

Chứng minh.

đẳng thức (4) và (6), ta có

Từ các đẳng thức trong (1) kết hợp với các bất

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}\right) \\ & \leq P_{(f;p)}([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) P_{(g;p)}([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) \\ & \leq \frac{1}{4} [f(a) + f(b)][g(a) + g(b)][h(t) + h(1-t)]^2. \quad (10) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh suy ra bằng cách lấy tích phân các bất đẳng thức (10) theo t trên đoạn $[0, 1]$ với lưu ý rằng

$$\begin{aligned} & \int_0^1 P_{(f;p)}([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) P_{(g;p)}([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) dt \\ & = \frac{1}{4} \int_0^1 [f([ta^p + (1-t)b^p]^{1/p}) + f([(1-t)a^p + tb^p]^{1/p})] \\ & \leq \frac{P}{b^p - a^p} \int_a^b z^{p-1} f(z) [g(z) + g([a^p + b^p - z^p]^{1/p})] dz \\ & = \frac{2P}{b^p - a^p} \int_a^b z^{p-1} f(z) [g(z) + g([a^p + b^p - z^p]^{1/p})] dz. \quad (11) \end{aligned}$$

Ta kết thúc chứng minh.

Định lý 10. Giả sử w là hàm không âm, khả tích trên đoạn $[a, b]$, và đối xứng qua điểm

$\left[\frac{a^p + b^p}{2}\right]^{1/p}$. Nếu f và g là các hàm (p, h) khả tích trên $[a, b]$ và $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ thì ta có các bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) g\left(\left[\frac{x^p + y^p}{2}\right]^{1/p}\right) \int_x^y w(z) dz \\ & \leq \frac{p}{y^p - x^p} \int_x^y z^{p-1} f(z) w(z) \left[g(z) + g\left([x^p + y^p - z^p]^{1/p}\right) \right] dz \\ & \leq \frac{p}{y^p - x^p} [M(a, b) + N(a, b)] \int_x^y z^{p-1} h\left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p}\right) \left[h\left(\frac{y^p - z^p}{y^p - x^p}\right) + h\left(\frac{z^p - x^p}{y^p - x^p}\right) \right] w(z) dz, \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in [a, b]$.

Chứng minh.

Nhân bất đẳng thức (10) với $w\left([(1-t)a^p + tb^p]^{1/p}\right)$, sau đó lấy tích phân bất đẳng thức vừa thu được ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã thiết lập một số bất đẳng thức kiểu Hermite-Hadamard và Hermite-Hadamard-Fejér cho tích của hai hàm (p, h) -lồi. Các kết quả của chúng tôi mở rộng và tổng quát hóa các kết quả hiện có trong các tài liệu (Pachpatte, 2003; Budak and Bakis, 2020). Những kết quả tương tự cũng được trình bày cho lớp hàm (p, h) -lồi đối xứng hoá, phát triển tiếp nghiên cứu

của (Thong, 2023). Ngoài ra, chúng tôi cũng đã khai thác các tính chất của tích phân bậc không nguyên Riemann-Liouville để thiết lập thêm các bất đẳng thức mới, mở rộng công trình của (Budak and Bakis, 2020).

Trong những nghiên cứu tiếp theo, ngoài việc thiết lập những bất đẳng thức mới cho tích hai hàm (p, h) -lồi, chúng tôi sẽ nghiên cứu để đưa ra những làm mịn cho các bất đẳng thức đã đạt được.

Lời cảm ơn.

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Nguyên trong khuôn khổ Đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở năm 2025. Mã số đề tài: T2025-03CB. Nhóm tác giả xin trân trọng cảm ơn sự hỗ trợ quý báu từ Nhà trường.

HERMITE-HADAMARD-TYPE INEQUALITIES FOR PRODUCT OF TWO (p, h) -CONVEX FUNCTIONS

Le Ba Thong¹, Nguyen Ngoc Hue¹

Received Date: 10/3/2025; Revised Date: 08/04/2025; Accepted for Publication: 10/04/2025

ABSTRACT

In this paper, we establish Hermite-Hadamard-type inequalities for the product of two (p, h) -convex functions. These inequalities generalize classical results for convex functions. Based on the results obtained, we demonstrate Hermite-Hadamard-type inequalities for the product of (p, h) -convex functions related to the Riemann-Liouville fractional integral and for the product of two symmetrized (p, h) -convex functions.

Keywords: (p, h) -convex function, symmetrized (p, h) -convex function, Hermite-Hadamard inequality, Fejér inequality, Riemann-Liouville fractional integral.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Budak, H., and Bakis, Y. (2020). On Fejér type inequalities for products of two convex functions. *Note di Matematica*, 40(1), 27-43.
- Cerone, P., and Dragomir, S. S. (2008). *Advances in inequalities for special functions*. Nova Science Publishers.
- Chen, F. (2013). A note on Hermite-Hadamard inequalities for products of convex functions. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1–6.
- Dragomir, S. S. (2016). Symmetrized convexity and Hermite-Hadamard-type inequalities. *Journal of Mathematical Inequalities*, 10(4), 901-918.
- Dragomir, S. S. (2017). Hermite-Hadamard type inequalities for the product of symmetrized convex functions. *RGMIA Research Report Collection*, 20.
- Fang, Z. B., and Shi, R. (2014). On the (p, h) -convex function and some integral inequalities. *Journal of Inequalities and Applications*, 2014(1), 1-16.
- Fejér, L. (1906). Über die fourierreihen, II. *Math. Naturwiss. Anz Ungar. Akad. Wiss.*, 24, 369-390.
- Hadamard, J. (1893). Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 9, 171-215.
- Hue, N. N., and Huy, D. Q. (2016). Some inequalities of the Hermite-Hadamard type for products of two functions. *Journal of New Theory*, 13, 26-37.
- Kilbas, A. A. et al. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations*. The Netherlands: Elsevier.
- Nawaz, T. et al. (2021). Hermite–Hadamard-Type Inequalities for Product of Functions by Using Convex Functions. *Journal of Mathematics*, 2021(1), 6630411.
- Pachpatte, B. G. (2003). On some inequalities for convex functions. *RGMIA Res. Rep. Coll.*, 6(1), 1-9.
- Sahoo, S. K., and Kodamasingh, B. (2020). Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for product harmonic convex function. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 9(7), 4797-4805.
- Sarikaya, M. Z. et al. (2008). On some Hadamard-type inequalities for h -convex functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, 2(3), 335-341.
- Thong, L. B. (2023). Symmetrized (p, h) -convexity and some Hermite-Hadamard-type inequalities. *Tay Nguyen Journal of Science*, 17(61), 27-33.

¹Faculty of Natural Science and Technology, Tay Nguyen University;
Corresponding author: Le Ba Thong; Tel: 0978165041; Email: lbthong@ttn.edu.vn.