

ỔN ĐỊNH TIỆM CẬN CỦA TẬP GIẢ GIÁ CỦA CÁC THÀNH PHẦN THUẦN NHẤT CỦA MÔĐUN PHÂN BẠC

Phạm Hữu Khánh¹

Ngày nhận bài: 08/7/2023; Ngày phản biện thông qua: 20/8/2023; Ngày duyệt đăng: 21/8/2023

TÓM TẮT

Cho $\mathfrak{R} = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ là một đại số phân bậc chuẩn hữu hạn sinh trên $R_0 = R$, trong đó (R, m) là vành Noether địa phương với ideal cực đại m và $\mathfrak{M} = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ là \mathfrak{R} -môđun phân bậc hữu hạn sinh. Trong bài báo này chúng tôi chỉ ra rằng, với mọi số nguyên $i \geq 0$, tập hợp $(\text{Psupp}_R^i(M_n) \setminus \text{Psupp}_R^{i-1}(M_n))_{\geq i-2}$ ổn định khi n đủ lớn.

Từ khóa: Ổn định, tập giả giá, linh hóa tử của môđun đối đồng điều địa phương.

1. MỞ ĐẦU

Cho $\mathfrak{R} = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ là một đại số phân bậc chuẩn hữu hạn sinh trên $R_0 = R$, trong đó (R, m) là vành Noether địa phương với ideal cực đại m và $\mathfrak{M} = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ là \mathfrak{R} -môđun phân bậc hữu hạn sinh.

Cho I là ideal của R và M là R -môđun hữu hạn sinh. Năm 1979, M. Brodmann chứng minh các tập ideal nguyên tố liên kết $\text{Ass}_R(M/I^n M)$ và $\text{Ass}_R(I^n M/I^{n+1} M)$ ổn định khi n đủ lớn (M. Brodmann 1979a). Tiếp theo S. McAdam và P. Eakin chứng minh tập $\text{Ass}_R R_n$ ổn định khi n đủ lớn (S. McAdam and P. Eakin 1979). Tổng quát hơn, L. Melkersson chứng minh rằng tập $\text{Ass}_R M_n$ độc lập với n khi n đủ lớn (L. Melkersson 1990) và thu được các kết quả đã biết của Brodmann và McAdam – Eakin. Từ đây, bài toán nghiên cứu đáng điều tiệm cận liên quan đến các thành phần thuần nhất M_n được quan tâm bởi nhiều người (N. T. Cuong and N.V. Hoang 2008, N. T. Cuong, N.V. Hoang and P. H. Khanh 2010, C. Rotthaus and L. M. Sega 2006).

Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Năm 2002, M. Brodmann and R. Y. Sharp đã đưa ra khái niệm tập giả giá thứ i của môđun M , ký hiệu bởi $\text{Psupp}_R^i(M)$, là tập hợp được xác định như sau:

$$\text{Psupp}_R^i(M) = \{p \in \text{Spec}(R) \mid H_{pR_p}^{i-\dim(R/p)}(M_p) \neq 0\}$$

(M. Brodmann and R. Y. Sharp 2002). Nhiều người đã nghiên cứu tập giả giá của R -môđun và thu được nhiều thông tin bổ ích về môđun và vành cơ sở R . Chúng ta ký hiệu

$$\text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_n))) = \{p \in \text{Spec}(R) \mid p \supset \text{Ann}_R(H_m^i(M_n))\}.$$

Trong trường hợp R là thương của vành địa phương Cohen-Macaulay thì chúng ta có đẳng thức $\text{Psupp}_R^i(M_n) = \text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_n)))$. Năm 2021, Lê Thanh Nhân và cộng sự đã chứng minh

một số kết quả về ổn định tiệm cận liên quan đến $\text{Ann}_R(H_m^i(M_n))$ (T. D. M. Chau, N. T. K. Nga and L. T. Nhan 2021). Họ chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên $t > 0$ sao cho

$$\bigcup_{j \leq i} \text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_n))) = \bigcup_{j \leq i} \text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_t)))$$

với mọi số nguyên $n \geq t$ và mọi số nguyên $i \geq 0$. Từ đây, Nhân và cộng sự đã chứng minh được rằng nếu R là thương của vành địa phương Cohen-Macaulay thì tồn tại số tự nhiên $t > 0$ sao cho

$$(\text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_n))))_{\geq i-1} = (\text{Var}(\text{Ann}_R(H_m^i(M_t))))_{\geq i-1}$$

với mọi số nguyên $n \geq t$ và mọi số nguyên $i \geq 0$.

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu tính ổn định của tập giả giá $\text{Psupp}_R^i(M_n)$ khi n đủ lớn. Kết quả chính của chúng tôi là chứng minh tính ổn định của tập

$$(\text{Psupp}_R^i(M_n) \setminus \text{Psupp}_R^{i-1}(M_n))_{\geq i-2}$$

khi n đủ lớn.

2. PHƯƠNG PHÁP VÀ NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Phương pháp nghiên cứu

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng một số phương pháp sau đây để nghiên cứu:

- Các phương pháp nghiên cứu toán lý thuyết.
- Phương pháp đồng điều và đối đồng điều.
- Phương pháp địa phương hóa.

2.2. Nội dung nghiên cứu

Nghiên cứu tính chất ổn định của tập giả giá của các thành phần thuần nhất của môđun phân bậc hữu hạn sinh trên đại số phân bậc chuẩn.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU VÀ THẢO LUẬN

Cho (R, m) là vành Noether địa phương với ideal cực đại m và M là R -môđun hữu hạn sinh.

Cho $i \geq 0$ là một số nguyên. Trước hết,

¹Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;

Tác giả liên hệ: Phạm Hữu Khánh; ĐT: 0905238905; Email: phkhanh@ttn.du.vn.