

ĐỊNH LÝ KIỂU TRỘI CHO HÀM h - LỖI MẠNH VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Nguyễn Thị Ngọc Bích¹

Ngày nhận bài: 22/4/2022; Ngày phản biện thông qua: 07/10/2022; Ngày duyệt đăng: 08/10/2022

TÓM TẮT

Bài báo này của chúng tôi chỉ ra định lý trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya vẫn còn đúng cho lớp hàm h - lỗi mạnh. Ứng dụng của kết quả này, chúng tôi mở rộng một số bất đẳng thức nổi tiếng cho các hàm lỗi suy rộng thuộc lớp hàm h - lỗi mạnh.

Từ khóa: Bộ trội, định lý trội, hàm h - lỗi mạnh, bất đẳng thức Karamata.

1. MỞ ĐẦU

Bộ trội đóng vai trò quan trọng và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như toán học (giải tích kết hợp, lý thuyết ma trận, bất đẳng thức hình học, giải tích số,...), thống kê, kinh tế,... (Marshall and Olkin, 1981). Lý thuyết bộ trội được xây dựng bởi nhiều nhà khoa học, điển hình trong số đó phải kể đến đóng góp qua các công trình của Muirhead (1903), Lorenz (1905), Dalton (1920), Schur (1923) (Marshall and Olkin, 1981). Tuy nhiên, đến các công trình của Hardy, Littlewood và Pólya khái niệm về bộ trội mới chính thức được định nghĩa một cách chặt chẽ (Hardy et al., 1929, Hardy et al., 1934).

Với mỗi vectơ $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ta kí hiệu $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ là vectơ nhận được từ x bằng cách sắp xếp lại các thành phần tọa độ của nó theo thứ tự giảm dần. Khi đó, với hai vectơ $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta nói y trội hơn x , kí hiệu $x \prec y$, nếu $\sum_{i=1}^k x_i^* \leq \sum_{i=1}^k y_i^*$, $k = 1, \dots, n$, với đẳng thức xảy ra khi $k = n$. Quan hệ này được đặc trưng bởi định lý trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya như sau.

Định lý 1.1 (Day, 1973). *Các khẳng định sau đây là tương đương đối với $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

$$x \prec y.$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq \sum_{i=1}^n f(y_i) \text{ với mọi hàm lồi liên tục } f$$

xác định trên \mathbb{R} .

$$x \text{ thuộc bao lồi của tập } \{z : z^* = y^*\}.$$

Tồn tại ma trận ngẫu nhiên kép A sao cho $x = Ay$.

Nhắc lại rằng một ma trận vuông cấp n được gọi là một ma trận ngẫu nhiên kép nếu các phần tử của nó không âm và tổng các phần tử trong mỗi dòng và mỗi cột đều bằng 1. Do đó mỗi thành phần tọa độ của vectơ x là trung bình có trọng của các thành phần tọa độ của vectơ y (x thuộc bao lồi của tập $\{z : z^* = y^*\}$). Đây chính là một trong

những đặc trưng hình học của bộ trội (Marshall and Olkin, 1981).

Do bộ trội có vai trò quan trọng nên Định lý 1.1 đã được xem xét mở rộng cho nhiều trường hợp khác nhau dựa trên tính lỗi suy rộng. Niculescu và Roventa đã sử dụng đặc trưng thứ 4 trong Định lý 1.1 để mở rộng khái niệm bộ trội đến tính lỗi suy rộng rất tổng quát (hàm (M, M_φ) -lồi) và đã thu được bất đẳng thức cho đặc trưng 2 của Định lý 1.1 (Niculescu and Roventa, 2017). Tuy nhiên, do đặc điểm của lớp hàm lỗi suy rộng được xét, công trình chỉ thu được điều kiện đủ mà không phải điều kiện cần cho đặc trưng này (Dương Quốc Huy, 2018, tr. 32).

Mục tiêu chính của chúng tôi trong bài báo này là mở rộng định lý trội nổi tiếng của Hardy-Littlewood-Pólya (Định lý 1.1) cho lớp hàm h -lỗi mạnh được giới thiệu bởi Angulo và cs. (Angulo et al., 2011). Trong bài báo, chúng tôi chỉ ra đặc trưng 2 là điều kiện cần và đủ cho bộ trội đối với lớp hàm này. Nói riêng, kết quả này cũng chính là một mở rộng của bất đẳng thức Karamata cho lớp hàm h - lỗi mạnh. Sau đó, chúng tôi chỉ ra một số bất đẳng thức nổi tiếng khác đối với hàm lỗi vẫn còn đúng cho lớp hàm h - lỗi mạnh.

2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Nội dung nghiên cứu

Nội dung nghiên cứu của bài báo thuộc về lĩnh vực giải tích lồi và bất đẳng thức. Cụ thể hơn, vấn đề nghiên cứu của bài báo tập trung chủ yếu vào lý thuyết các bộ trội, gắn liền với hàm h - lỗi mạnh và bất đẳng thức.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Bên cạnh việc sử dụng phương pháp đặc biệt hóa và khái quát hóa để có được cái nhìn tổng quan về vấn đề nghiên cứu, chúng tôi còn sử dụng đặc trưng hình học của bộ trội. Hơn nữa, chúng tôi kết hợp đặc trưng này với đặc trưng giải tích của lớp

¹Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;

Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Ngọc Bích; ĐT: 0983048837; Email: ntnbich@ttn.edu.vn.