CÁC BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU FEJÉR CHO HÀM LỒI MẠNH

Nguyễn Ngọc Huề[1], Đoàn Thị Thúy Vân[1]

Ngày nhận bài: 06/12/2021; Ngày phản biện thông qua: 23/02/2022; Ngày duyệt đăng: 13/3/2022

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một số bất đẳng thức kiểu Fejér cho lớp hàm lồi mạnh. Các kết quả này làm mịn kết quả được công bố gần đây bởi Duc và cộng sự năm 2020 cho lớp hàm lồi. Từ đó, một số bất đẳng thức mới đặc trưng cho lớp hàm lồi mạnh cũng được thiết lập.

Từ khóa: *bất đẳng thức kiểu Fejér, bất đẳng thức Hermite-Hadamard, hàm lồi mạnh.*

1. MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức Hermite-Hadamard được giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1883 bởi Hermite (Hermite, 1883) và 10 năm sau bởi Hadamard (Hadamard, 1893): Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm lồi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (1.1)$$

Dạng có trọng của bất đẳng thức Hermite-Hadamard được đưa ra bởi Fejér (Fejér, 1906): Nếu $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm lồi, $g:[a,b]\to[0,\infty)$ là hàm khả tích với $\int_a^b g(x)dx>0$ và đối xứng qua $\frac{a+b}{2}$, tức là $g(x)=g(a+b-x)$ với mọi $x\in[a,b]$, thì

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (1.2)$$

Hai bất đẳng thức trên đã nhận được sự quan tâm lớn của các nhà toán học phát triển và mở rộng theo nhiều hướng, chẳng hạn xem xét các lớp hàm lồi khác nhau nhằm tìm kiếm những áp dụng trong các lý thuyết khác như lý thuyết hàm lồi, lý thuyết tối ưu (xem Dragomir et al., 2002; Duc et al. 2020; Niculescu et al., 2006; Pećarić et al., 1992).

Một lớp con quan trọng của lớp các hàm lồi là lớp hàm lồi mạnh được Polyak (Polyak, 1966) đưa ra vào năm 1966 nhằm mục đích giải quyết một số vấn đề liên quan đến một bài toán tối ưu. Khái niệm này đã đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu.

Hàm số $f:I\to\mathbb{R}$ được gọi là hàm lồi mạnh với modun c ($c>0$) nếu

$$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)-ct(1-t)(x-y)^2,$$

với mọi $x, y\in I$ và $x\le y$. Ta nói f là hàm lồi mạnh trung điểm với modun c nếu

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}-c\frac{(x-y)^2}{4}.$$

Năm 2010, Merentes và Nikodem (Merentes et al., 2010) đã thiết lập bất đẳng thức Hermite-Hadamard cho hàm lồi mạnh như sau: Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh với modun c

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{c}{12}(b-a)^2\\&\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(b-a)^2.\end{aligned} \quad (1.3)$$

Năm 2012, Azocar (Azocar et al., 2012) cùng các cộng sự đã đưa ra đẳng thức Fejér cho hàm lồi mạnh: Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ là hàm lồi mạnh với modun c và $g:[a,b]\to[0,\infty)$ là hàm khả tích với $\int_a^b g(x)dx=1$ và đối xứng qua $\frac{a+b}{2}$:

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a+b}{2}\right)+c\left[\int_a^b x^2g(x)dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\\&\le\int_a^b f(x)g(x)dx\\&\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-c\left[\frac{a^2+b^2}{2}-\int_a^b x^2g(x)dx\right].\end{aligned} \quad (1.4)$$

Tiếp tục hướng nghiên cứu đáng quan tâm trên, trong bài báo này chúng tôi thiết lập các bất đẳng thức kiểu Fejér cho lớp hàm lồi mạnh, cụ thể là đưa ra các bất đẳng thức nội suy kiểu Fejér mà chúng đặc trưng cho bản chất lồi mạnh liên tục. Từ đó đưa ra các bất đẳng làm mịn cho bất đẳng thức Hermite-Hadamard đối với hàm lồi mạnh. Kỹ thuật được xây dựng trong bài báo này có thể thúc đẩy những nghiên cứu sâu hơn trong hướng nghiên cứu này.

2. NỘI DUNG, PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Nội dung nghiên cứu

- Bất đẳng thức kiểu Fejér cho lớp hàm lồi mạnh;

- Các bất đẳng thức nội suy kiểu Fejér cho lớp hàm lồi mạnh liên tục;

- Các bất đẳng làm mịn cho bất đẳng thức

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;*
Tác giả liên hệ: Nguyễn Ngọc Huề, ĐT: 0905684768, Email: nnhue@ttn.edu.vn.